

HATVÁNYOZÁS, NORMÁL ALAK

– GYAKORLÁS A KISÉRETTSÉGRE

I.) Adja meg az alábbi számok normálalakját!

1. $33000000000 =$
2. $0,00000103 =$
3. $628 \cdot 10^{-16} =$
4. $0,000056 \cdot 10^{-16} =$
5. $0,000\ 000\ 64 \cdot 10^{25} =$

Megoldás:

A számok normálalakja (tudományos jelölése) mindig egy olyan szorzat, amelynek első tényezője 1 és 10 közé esik ($1 \leq a < 10$), a második tényezője pedig 10 valamelyik egész kitevőjű hatványa.

1. $330\ 000\ 000\ 000 = 3,3 \cdot 10^{11}$
A tizedesvesszőt a szám végéről 11 helyi értékkel toltuk balra, hogy a 3-as és a következő 3-as közé kerüljön. **Mivel balra léptünk (nagy számot alakítottunk át), a kitevő pozitív +11.**
 2. $0,00000103 = 1,03 \cdot 10^{-6}$
A tizedesvesszőt 6 helyi értékkel toltuk jobbra, hogy az első nem nulla számjegy (1) után álljon. **Mivel jobbra léptünk (kicsi, 1-nél kisebb számot alakítottunk át), a kitevő negatív –6.**
 3. $628 \cdot 10^{-16} = 6,28 \cdot 10^{-14}$
 4. $0,000056 \cdot 10^{-16} = 5,6 \cdot 10^{-21}$
 5. $0,000\ 000\ 64 \cdot 10^{25} = 6,4 \cdot 10^{18}$
-

II.) Végezze el az alábbi műveletet! A végeredményt normálalakban adja meg!

1. $(7 \cdot 10^{16}) \cdot (3,5 \cdot 10^{-23}) =$
2. $\frac{2,4 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^{-6}} =$
3. $6,27 \cdot 10^{25} + 7,3 \cdot 10^{24} =$
4. $9,35 \cdot 10^{-25} + 6,5 \cdot 10^{-26} =$
5. $5,1 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-5} =$
6. $(5,1 \cdot 10^{-8} + 2,3 \cdot 10^{-9}) \cdot 3 \cdot 10^{25} =$
7. $\frac{6,8 \cdot 10^{10} - 5,4 \cdot 10^9}{4 \cdot 10^{-15}} =$

Megoldás:

Feladat (eredeti kiírás)	Részszerítés	Végeredmény normálalakban
1. $(7 \cdot 10^{16}) \cdot (3,5 \cdot 10^{-23})$	$(7 \cdot 3,5) \cdot 10^{16+(-23)} = 24,5 \cdot 10^{-7}$	$2,45 \cdot 10^{-6}$
2. $\frac{2,4 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^{-6}}$	$(2,4 : 3) \cdot 10^{18-(-6)} = 0,8 \cdot 10^{24}$	$8 \cdot 10^{23}$
3. $6,27 \cdot 10^{25} + 7,3 \cdot 10^{24}$	$(6,27 + 0,73) \cdot 10^{25} = 7 \cdot 10^{25}$	$7 \cdot 10^{25}$
4. $9,35 \cdot 10^{-25} + 6,5 \cdot 10^{-26}$	$(9,35 + 0,65) \cdot 10^{-25} = 10 \cdot 10^{-25}$	$1 \cdot 10^{-24}$
5. $5,1 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-5}$	$(5,1 - 0,2) \cdot 10^{-4} = 4,9 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$
6. $(5,1 \cdot 10^{-8} + 2,3 \cdot 10^{-9}) \cdot 3 \cdot 10^{25}$	$(5,33 \cdot 10^{-8}) \cdot 3 \cdot 10^{25} = 15,99 \cdot 10^{17}$	$1,599 \cdot 10^{18}$
7. $\frac{6,8 \cdot 10^{10} - 5,4 \cdot 10^9}{4 \cdot 10^{-15}}$	$(6,26 \cdot 10^{10}) : (4 \cdot 10^{-15}) = 1,565 \cdot 10^{25}$	$1,565 \cdot 10^{25}$

III.) A Nap tömege $3,955 \cdot 10^{30}$ kg; egy proton tömege $1,673 \cdot 10^{-24}$ gramm. Hányszorosa a Nap tömege egy proton tömegének? A választ normálalakban adja meg!

Megoldás:

1. Adatok rögzítése és átváltása

- Nap tömege: $3,955 \cdot 10^{30}$ kg
- Proton tömege: $1,673 \cdot 10^{-24}$ g
- Mivel a proton tömege grammban van, a Nap tömegét is átváltjuk grammba.
- Tudjuk, hogy $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 10^3 \text{ g}$
- Így a Nap tömege: $3,955 \cdot 10^{33}$ g

2. Az osztás elvégzése

Ahhoz, hogy megtudjuk, hányszorosa egyik a másiknak, a nagyobb értéket elosztjuk a kisebbel:

$$\frac{3,955 \cdot 10^{33}}{1,673 \cdot 10^{-24}}$$

- A számok osztása:
 $3,955 : 1,673 \approx 2,364$
- A hatványok osztása:
A kitevőket ki kell vonni egymásból. Mivel a nevezőben negatív szám van, a kivonásból összeadás lesz.
 $33 - (-24) = 33 + 24 = 57.$

3. Végeredmény:

A két részeredményt összerakva megkapjuk a normálalakot.

$$2,364 \cdot 10^{57}$$

Tehát a Nap tömege kb. $2,364 \cdot 10^{30}$ -szerese egy proton tömegének. Ez egy elképesztően nagy szám (egy 2-es és egy 3-as után még 54 számjegy következne).

IV.) Alkalmazza a hatványozás azonosságait, majd határozza meg a hatványok értékét! (A végeredmény egyetlen egész vagy tört szám legyen!)

1. $6^3 \cdot 6^{-4} =$

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

3. $\frac{3^{-12}}{3^{-16}} =$

4. $\frac{\left(\left(4^2\right)^3\right)^{-5}}{\left(\left(4^{-2}\right)^4\right)^4} =$

5. $\frac{\left(5^3\right)^{-4} \cdot \left(4^{-3}\right)^{-2}}{\left(4^5\right)^{-1} \cdot \left(5^{-3}\right)^{-3}} =$

Megoldás:

Feladat	Levezetés	Eredmény	Szabály
1. $6^3 \cdot 6^{-4}$	$6^{3-4} = 6^{-1}$	1/6	$a^n \cdot a^m$
2. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{3-7+2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	16/9	$a^n \cdot a^m \cdot a^k$
3. $\frac{3^{-12}}{3^{-16}}$	$3^{-12-(-16)} = 3^4$	81	a^n / a^m
4. $\frac{\left(\left(4^2\right)^3\right)^{-5}}{\left(\left(4^{-2}\right)^4\right)^4}$	$\frac{4^{-30}}{4^{-32}} = 4^{-30+32} = 4^2$	16	$(a^n)^m$
5. $\frac{\left(5^3\right)^{-4} \cdot \left(4^{-3}\right)^{-2}}{\left(4^5\right)^{-1} \cdot \left(5^{-3}\right)^{-3}}$	$\frac{5^{-48} \cdot 4^{24}}{4^{25} \cdot 5^{-45}} = 5^{-3} \cdot 4^{-1}$	1/500	$(a \cdot b)^n$

VI.) A hatványozás azonosságainak felhasználásával végezze el az alábbi műveleteket! A végeredményt törtmentesen a lehető legegyszerűbb alakban adja meg!

1. $\frac{5}{x^{-12}} =$
2. $\frac{a^4}{c^{-6}} =$
3. $\frac{x^{-5}y^2}{x^{-3}y^{-4}} =$
4. $(a^2b^{-4}x^3)^{-3} \cdot (a^{-2}b^3x^2)^4 =$
5. $\left(\frac{a^8b^{-10}c^5}{(x^2y)^{-3}x^7}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-5}bx^{-1}}{c^4y^3}\right)^{-2} =$

Megoldás:

A "törtmentes" kifejezés azt jelenti, hogy a nevezőben lévő változókat felvisszük a szorzó mellé. Ezt a következő szabályokkal tehetjük meg:

Negatív kitevő szabálya:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \text{ és } \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Ha egy hatványt a törtvonalon átmozgatunk (nevezőből számlálóba vagy fordítva), a kitevőjének az előjele megváltozik.

Osztásnál kivonunk:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ez automatikusan törtmentes alakot ad, ha nem írjuk le újra törtként az eredményt.

Hatvány hatványozása:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Itt minden belső kitevőt meg kell szorozni a külsővel (vigyázva az előjelekre!).

Így:

$$1. \quad \frac{5}{x^{-12}} = 5 \cdot x^{-(-12)} = 5x^{12}$$

$$2. \quad \frac{a^4}{c^{-6}} = a^4 \cdot c^{-(-6)} = a^4c^6$$

$$3. \quad \frac{x^{-5}y^2}{x^{-3}y^{-4}} = x^{-5-(-3)} \cdot y^{2-(-4)} = x^{-2}y^6$$

$$4. \quad (a^2b^{-4}x^3)^{-3} \cdot (a^{-2}b^3x^2)^4 = (a^{-6}b^{12}x^{-9}) \cdot (a^{-8}b^{12}x^8) = a^{-14}b^{24}x^{-1}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & \left(\frac{a^8b^{-10}c^5}{(x^2y)^{-3}x^7}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-5}bx^{-1}}{c^4y^3}\right)^{-2} = \\ & = \left(\frac{a^8b^{-10}c^5}{x^{-6}y^{-3}x^7}\right)^3 \cdot (a^{-5}bx^{-1}c^{-4}y^{-3})^{-2} = \\ & = (a^8b^{-10}c^5x^{-1}y^3)^3 \cdot (a^{10}b^{-2}x^2c^8y^6) = \\ & = (a^{24}b^{-30}c^{15}x^{-3}y^9) \cdot (a^{10}b^{-2}x^2c^8y^6) = \\ & = a^{34}b^{-32}c^{23}x^{-1}y^{15} \end{aligned}$$